Научный центр «LJournal»

Рецензируемый научный журнал

ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

№94, Февраль 2023
(Часть 5)

Самара, 2023

Морозов В.И.

Представление вероятности безотказной работы системы в виде ряда Тейлора

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна (Россия, Санкт-Петербург)

Аннотация

В технологии логико-вероятностного моделирования для оценки важности отказов элементов сложных технических систем (СТС) применяются показатели одно, двукратной и к-кратной значимости. В данной статье представлена вероятность безотказной работы системы в виде ряда Тейлора на основе к-кратных совместных значимостей.

Ключевые слова: надежность, логико-вероятностный метод, технология логико-вероятностного моделирования, сложная техническая система, к-кратная совместная значимость, показатель важности по Бирнбауму.

Abstract

In the technology of logic-probabilistic modeling, to assess the importance of element failures of complex technical systems (CTS), indicators of one, two-fold and k-fold significance are used. This article presents the probability of the system's failure-free operation in the form of a Taylor series based on k-fold joint significances.

Keywords: reliability, logical-probabilistic method, logical-probabilistic modeling technology, complex technical system, k-fold joint significance, Birnbaum importance index.

В настоящее время в системном анализе широко применяется технология логико-вероятностного моделирования (ТЛВМ) для изучения свойств структурно-сложных систем, к которым относятся и сложные технические системы. Как отмечено в работе [1] они нормативно применяются для вероятностной оценки безопасности, живучести и надежности атомных электростанций, атомных подводных лодок, авиационных и космических комплексов, везде, где высока цена риска и существует сложная структура и организация объекта(системы).

Среди показателей важности оценки выше приведенных свойств необходимо отметить однократную и двукратную значимости. Однократная значимость также называется показателем важности по Бирнбауму, который предложил данный показатель. И.А. Рябинин и Ю.М. Парфенов [2] в 1991 году вывели и обосновали показатель важности – двукратную совместную значимость.

Понятие и определение функции вероятности безотказной работы системы впервые было предложено И.А. Рябининым в работе [3]. Вероятностной функцией (ВФ) называется вероятность истинности функции алгебры логики (ФАЛ):

$$P\{f(x_1, \dots, x_{i,} \dots, x_n) = 1\}, \quad (1)$$

где: x1, …xi, …xn– логические переменные, характеризующие работоспособное состояние элементов системы: m1 , …. mi, …mn ,;

n – количество элементов системы.

Логическая переменная $x_{i,}$ принимает значение 1, если i-ый элемент системы работоспособен, и значение 0 - при неработоспособном состоянии. Функция алгебры логики (ФАЛ), отображающая взаимосвязь элементов системы, применительно к решаемой задачи названа функцией работоспособности системы (ФРС):

$$F = f(x_1, \dots, x_{i,} \dots, x_n), \quad (2)$$

В соответствии с ТЛВМ из ортогональной дизъюнктивной нормальной формы ФРС получаем функцию вероятности безотказной работы системы, которая является линейной функцией любой из переменных Ri , где Ri – вероятность безотказной работы i-го элемента системы.

Таким образом ВБРС принадлежит к классу функций n переменных, изменяющихся в области значений от нуля до единицы при области допустимых значений переменных от нуля до единицы. ВБРС строится на основе ФРС (логической связи элементов системы) и отражает вероятность истинности ФРС:

$$R_c = P\{f(x_1, \dots, x_{i,} \dots, x_n) = 1\},$$
$$R_i = P(x_i = 1), \quad (3)$$
$$R_c = [0,1],$$
$$R_i = [0,1].$$

ВБРС непрерывна и дифференцируема в области допустимых значений переменных.

Как отмечено в работе [4] В 1993 году в ВМА им. Н.Г. Кузнецова в интересах разработки передвижного диагностического комплекса корабельного оборудования и решения частной задачи формирования приоритетных направлений диагностического обеспечения и, прежде всего, для корабельных атомных энергетических установок потребовалось изучать влияние большего количества элементов СТС на вероятность безотказной работы системы (ВБРС).

В 2000-2001 годах были опубликованы научно-технические сообщения [5,6], в которых представлены основные положения разработанной мною методологии формирования приоритетных направлений внедрения диагностического обеспечения на АЭС. В этих работах также применялись показатели к-кратной совместной значимости, поэтому возникла необходимость более подробно остановиться на этих вопросах.

В связи с чем мною было выведено математическое выражение показателя – к-кратной совместной значимости. В работе [4] был изложен вывод формулы смешанной частной производная k-го порядка функции вероятности безотказной работы системы (ВБРС) (к-кратной совместной значимости):

$$\zeta_{ij\dots s} = \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i\, \partial R_j \dots \partial R_s} = \sum_{i,j\dots s} (-1)^z R_{c\ l,p\dots f}, \quad (4)$$

где i,j…s - номера переменных функции ВБРС;

Pk = 2k – количество наборов суммы;

l,p…..f = [0,1];

- z – количество нулей в наборах индексов l,p…..f.

Рассмотрим содержание формулы (4). Смешанная частная производная k-го порядка состоит из 2к членов (по количеству комбинаций нулей и единиц для k переменных). Каждый член суммы представляет собой вероятностную функцию, полученную из функции ВБРС подстановкой вместо вероятностей Ri, Rj, ….Rs фактических значений 0 и 1 в соответствии с набором значений l,p…..f. Количество индексов равно k. Знак перед членом суммы (6) имеет значение плюс (+), если сумма нулей в наборах элементов суммы (6) – четная, и знак минус(-), если сумма нулей нечетная.

Разложим функцию вероятности безотказной работы системы в ряд Тейлора по n независимым переменным:

$$\Delta R_c = dR_c + \frac{d^2 R_c}{2!} + \cdots \frac{d^n R_c}{n!} + \left[\frac{d^{n+1} R_c}{(n+1!}\right]_{R_n + \theta dR_n}^{R_1 + \theta dR_1} \dots\dots\dots\dots R_c, \quad (5)$$

где: $\left[\frac{d^{n+1} R_c}{(n+1!}\right]_{R_n + \theta dR_n}^{R_1 + \theta dR_1} \dots\dots\dots\dots$ – остаточный член ряда Тейлора в форме Лагранжа равен нулю, так как производная порядка n+1 равна нулю.

Дифференциал порядка k для n независимых переменных имеет следующий вид:

$$d^k R_c = (\frac{\partial R_c}{\partial R_1} dR_1 + \cdots \frac{\partial R_c}{\partial R_i} dR_i \ldots + \frac{\partial R_c}{\partial R_n} dR_n)^k. \quad (6)$$

На основании формулы (2) дифференциалы имеют следующий вид:

$$dR_{c=} \sum_{i \in C_n^1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} dR_i$$

$$d^2 R_c = \left(\frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_1} d^2 R_1 + \cdots \frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_i} d^2 R_i \ldots + \frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_n} d^2 R_n\right) + 2! \sum_{i,j \in C_n^2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} dR_i dR_j \quad (7)$$

$$d^k R_c = k! \sum_{i,j \ldots s \in C_n^k} \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_s} dR_i \ldots dR_j \ldots dR_s$$

$$d^n R_c = n! \sum_{i,j \ldots s \in C_n^n} \frac{\partial^n R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_n} dR_i \ldots dR_j \ldots . . dR_n = n! \frac{\partial^n R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_n} dR_i \ldots dR_j \ldots dR_n$$

Производные второго и более высокого порядка равны нулю:

$$\left(\frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_1} d^2 R_1 + \cdots \frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_i} d^2 R_i \ldots + \frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 R_n} d^2 R_n\right) = 0$$

Поэтому в выражениях остаются смешанные частные производные порядка k. Подставим выражения (3) в формулу (5) и получим:

$$\Delta R_c = \sum_{i \in C_n^1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} dR_i + \sum_{i,j \in C_n^2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} dR_i dR_j + \cdots \sum_{i,j \ldots s \in C_n^k} \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_s} dR_i \ldots dR_j \ldots dR_s + \cdots + \frac{\partial^n R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_n} dR_i \ldots dR_j \ldots dR_n \quad (8)$$

Учитывая линейные характер функции n переменных вероятности безотказной работы системы, переходим от дифференциалов dR_i к приращениям ΔR_i и выражение (8) приобретает следующий вид:

$$\Delta R_c = \sum_{i \in C_n^1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_i + \sum_{i,j \in C_n^2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} \Delta R_i \Delta R_j + \cdots \sum_{i,j \ldots s \in C_n^k} \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_s} \Delta R_i \ldots \Delta R_j \ldots \Delta R_s + \cdots + \frac{\partial^n R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_n} \Delta R_i \ldots \Delta R_j \ldots \Delta R_n , \quad (9)$$

где C_n^k- число сочетаний из n по k элементов

Если в выражение (9) подставить начальные значения вероятности безотказной работы элементов равными нулю, то выражение функции ВБРС (9) будет иметь следующий вид:

$$R_c = \sum_{i \in C_n^1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} R_i + \sum_{i,j \in C_n^2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} R_i R_j + \cdots \sum_{i,j \ldots s \in C_n^k} \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_s} R_i \ldots R_j \ldots R_s + \cdots + \frac{\partial^n R_c}{\partial R_i \ldots \partial R_j \ldots . \partial R_n} R_i \ldots R_j \ldots R_n , \quad (10)$$

Представление функции вероятности безотказной работы системы в виде ряда Тейлора (9) является эффективным средством для проведения углубленных исследований надежности, безопасности и живучести сложных технических систем. Функция ВБРС представлена на основе к-кратных совместных значимостей, учитывающих влияние ряда отказов элементов на систему в целом. На основе представления ВБРС в виде ряда Тейлора выведен ряд показателей важности («весовых коэффициентов»), о части из которых будет рассказано в следующем материале.

В процессе эксплуатации вероятность безотказной работы элементов системы будет меняться. Модель вероятности безотказной работы системы, разработанная на основе функции (9) позволит переопределять важность элементов системы при переходе из одного вероятностного состояния элементов в другое (ΔR_i) и системы в целом (ΔR_c). На основе текущих и прогнозных данных, полученных из обслуживающих систему комплексов технического диагностирования, возникает возможность создания действующей в режиме реального времени системы мониторинга и оценки риска состояния сложной технической системы.

В заключение необходимо отметить, что в 1981 году И.А. Рябинин в работе [3] обозначил широкий класс объектов моделирования под названием структурно-сложных систем, не ограничиваясь сложными техническими системами. Технология логико-вероятностного моделирования применима для исследования разнообразных объектов, имеющих сложную структуру и организацию. При этом вероятность может быть не только безотказной работы, но и риска возникновения опасного состояния, а также иных показателей: степени принадлежности или предпочтений.

***

1. Морозов В.И. Алгоритм расчета к-кратной совместной значимости в технологии логико-вероятностного моделирования. Тенденции развития науки и образования №94, февраль 2023 г
2. Рябинин И.А., Парфенов Ю.М. Определение характеристик важности совокупности элементов энергетической системы при исследовании ее безотказности. Энергетика и транспорт, т. 37, 1991 г.
3. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М., Радио и связь, 1981 г, 238 л.
4. Морозов В.И. Определение к-кратной совместной значимости в технологии логико-вероятностного моделирования. Тенденции развития науки и образования №93, январь 2023 г.
5. Морозов В.И. Приоритетные направления внедрения диагностического обеспечения на АЭС. Атомная энергия, т.88, выпуск 4, апрель 2000, с. 311-313.
6. Морозов В.И. Отдельные аспекты технической диагностики АЭС. Атомная энергия, т.91, выпуск 1, июль 2001, с. 71-75.