

Морозов В.И.

Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна
Россия, Санкт-Петербург

Недостатки и предложения по улучшению метода анализа иерархий

Аннотация

В данной статье выполнен обзор метода анализа иерархий (МАИ) Т.Саати в части формирования экспертами матриц парных сравнений, выявлены недостатки и разработаны рекомендации по совершенствованию МАИ.

Ключевые слова: системный анализ, теория принятия решений, метод анализа иерархий, матрица парных сравнений, шкала относительной важности.

Shortcomings and suggestions for improving the Analytic hierarchy process

Abstract

This article analyses T. Saaty's Analytic hierarchy process (AHP) in the part of formation of pairwise comparison matrices by experts, identifies shortcomings and develops recommendations to improve AHP.

Keywords: system analysis, decision-making theory, Analytic hierarchy process (AHP), pairwise comparison matrix, relative importance scale.

Метод анализа иерархий (МАИ), разработанный Т.Саати, стал широко известным в России в 90-х годах прошлого века. Мною он также был применён при решении второстепенной частной задачи в Военно-морской академии в 1993-1994 годах. Тогда же мне стали очевидны основные недостатки МАИ.

Один из недостатков МАИ - возможное существенное отклонение элементов матрицы парных сравнений, установленных экспертами, от своих рангов. Для его устранения рекомендую проверить на согласованность элементы матрицы в порядке возрастания или убывания методом сортировки и

ранжирования. Не выполнение этой процедуры в знаменитом труде Т. Саати [1] привело к ошибке в демонстрационном примере выбора варианта покупки дома, которую он исправил в 2015 году в работе [2]. В таблицах 1 и 3 приведены эти критерии (факторы) в наименовании работы [2].

Таблица 1

Покупка дома: Матрица парных сравнений критериев от 1991 года

Фактор	Раз- меры дома	Общ.Тран спорт	Окрестно сти	Воз- раст дома	Двор	Удоб- ства	Общее состо- яние	Финан- сы
	1	2	3	4	5	6	7	8
Размеры дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Общ транспорт	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Окрестности	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
Возраст дома	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Удобства	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
Финансы	4	7	5	8	6	6	2	1

Выполним построчно сортировку критериев в порядке возрастания для таблицы. Знак равно перед или после номера критерия означает, что значения критериев в таблице 1 одинаковы: например: в строке 1 пятого и шестого элементов.

Как мы видим по результатам сортировки критериев в таблице 2 элемент a_{37} таблицы 1 и обратный ему элемент a_{73} установлены некорректно и требуют дополнительного уточнения экспертом. В работе [2] Т. Саати внёс исправления, откорректированные значения приведены в таблице 3.

Таблица 2

Отсортированные построчно критерии из таблицы 1 по номерам в порядке возрастания

Фактор	Номера Критериев							
Размеры дома	4	5=	=6	2	3	1	7	8
транспорт	4	5=	=6	2	3	1=	=7	8
Окрестности	7	4	6	5=	=2	3	1	8
Возраст дома	4	5	6	2	3	1=	=7	8
Двор	4	5	6	3=	=2	7	1	8
Удобства	4	5	6	2	3	7	1=	=8
Общее состояние	4	5=	=6=	=2	1	7	8	3
Финансы	4	2	6	5	3	1	7	8

Таблица 3

Покупка дома: Матрица парных сравнений критериев от 2015 года

Фактор	Разме- ры дома	Общ транспорт	Окрест- ности	Воз- раст дома	Двор	Удоб- ства	Общее состо- яние	Финан- сы
	1	2	3	4	5	6	7	8
Размеры дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Общ. транспорт	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Окрестности	1/3	3	1	6	3	4	1/2	1/5
Возраст дома	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Удобства	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Общее состояние	3	5	2	7	5	5	1	1/2
Финансы	4	7	5	8	6	6	2	1

Таблица 4

Отсортированные построчно критерии из таблицы 3 по номерам в порядке возрастания

Фактор	Номера Критериев							
Размеры дома	4	5=	=6	2	3	1	7	8
транспорт	4	5=	=6	2	3	1=	=7	8
Окрестности	4	6	5=	=2	3	7	1	8
Возраст дома	4	5	6	2	3	1=	=7	8
Двор	4	5	6	2=	=3	7	1	8
Удобства	4	5	6	2	3	7	1=	=8
Общее состояние	4	5=	=6=	=2	1	3	7	8
Финансы	4	2	6	5	3	1	7	8

Поэтому при формировании матриц критериев и альтернатив в качестве обязательного этапа процедуры для недопущения выше приведённых ошибок рекомендуется обязательно осуществлять сортировку полученных значений критериев и альтернатив выбора в порядке возрастания или убывания и их ранжирование. При этом по матрице парных сравнений (МПС) в целом возможны различные варианты.

МПС могут составлять разные эксперты и их мнения могут не совпадать или, как в данном примере, сортировка и ранжирование не выполнялись, и эксперт не увидел различия или по-разному оценил вес элементов в разных строках матрицы. Если сравнивать разные строки матрицы в таблице 4, то часть соседних элементов меняются местами, а в строке 7 значения трёх элементов равны и это нормально. Требуется уточнения ситуация с корректурой МПС, когда не соседние элементы парных сравнений, прошедшие сортировку и ранжирование, слишком далеко отклонились от своего ранга.

В работе [1] элементы матриц критериев и альтернатив представлены в виде соответствующих парных сравнений элементов [1]:

	A_1	A_2	A_3	...	A_n
A_1	w_1 w_1	w_1 w_2	w_1 w_3	...	w_1 w_n
A_2	w_2 w_1	w_2 w_2	w_2 w_3	...	w_2 w_n
A_3	w_3 w_1	w_3 w_2	w_3 w_3	...	w_3 w_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_n	w_n w_1	w_n w_2	w_n w_3	...	w_n w_n

Это одна строка — "вектор" этой матрицы (строка № 1). Ее элементы называются компонентами.

Это один столбец этой матрицы (столбец № 2). Он также известен как "вектор" матрицы.

,

где w_i - вес произвольного i -го элемента, элемент матрицы a_{ij} критериев или альтернатив равен w_i/w_j ($a_{ij} = w_i/w_j$), то есть a_{ij} - относительный вес i -го элемента матрицы к j -му элементу.

В соответствии с МАИ экспертами заполняются предпочтения (приоритеты) выше диагонали таблицы. Диагональные элементы, как следует из выше сказанного: $w_i/w_i = 1$. Кроме этого, значения элементов МПС обратно симметричны: $a_{ji} = w_j/w_i = 1/(w_i/w_i) = 1/a_{ij}$ и заполняются на основе значений выше диагонали.

Это и другие аспекты порождают ряд противоречий, которые можно пояснить при продолжении рассмотрения примера с выбором дома.

На самом деле для получения значений всех элементов таблицы парных сравнений достаточно значений парных сравнений одной строки данной матрицы, как показано ниже:

$$a_{ij} = \left(\frac{1}{w_1/w_i} \right) \times \frac{w_1}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} \quad (1),$$

Тогда возникает вопрос, а зачем заполнять экспертам все, что выше диагонали? Ответ достаточно простой: суждения экспертов являются субъективными и МАИ на основе заполненных данных их усредняет и уточняет. Если заполнить одну строку, а все остальные значения получить расчётным путём, то ошибка в значениях одной строки будет растиражирована на часть элементов МПС, как в случае с элементом a_{37} , что повлекло за собой изменение элемента a_{73} . Больше из таблиц 1 и 3 ничего не видно.

Поэтому важен этап сортировки и ранжирования и его результат в виде таблиц 2 и 4, если посмотреть на строки 3 и 7 матриц в этих таблицах, то изменения в порядке ранжированных элементов в данных строках произошли кардинальные и все стало на свои места. Как результат, в работе [2] победил вариант дома В, а не А, как в работе [1].

Пойдём далее, давайте проверим значения критериев, заполненных экспертом и полученных расчётным путём, например второй строки.

Таблица 5

Сравнение расчётных и экспертных данных

Способ получения данных	Номера критериев							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Экспертные	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
расчетные	1/5	1	3/5	7/5	6/5	6/5	1/15	1/20

Как мы видим из таблицы 5 данные, начиная с 3 элемента отличаются в несколько раз, а два последних выходят далеко за границы шкалы относительной важности (ШОВ) и их значения просто обрезаются, при этом часть значений, начиная со второй строки носят расчётный характер, а часть, - экспертный, что, в совокупности с выше изложенным представляется некорректным.

Для преодоления этих недостатков предлагается дополнительно изменить процедуру МАИ. С этой целью произведём расчёт средневзвешенных значений факторов на основании данных ранжирования таблицы 4:

$$\xi(4) = (1 \times 8) / 8 = 1$$

$$\xi(5) = (2 \times 3 + 2,5 \times 2 + 3 \times 1 + 3,5 \times 1 + 4 \times 1) / 8 = 43/16$$

$$\xi(6) = (2 \times 1 + 2,5 \times 2 + 3 \times 5) / 8 = 22/8$$

$$\xi(2) = (2 \times 1 + 3 \times 1 + 3,5 \times 1 + 4 \times 4 + 4,5 \times 1) / 8 = 29/8$$

$$\xi(3) = (4,5 \times 1 + 5 \times 6 + 6 \times 1) / 8 = 81/16$$

$$\xi(1) = (5 \times 1 + 6 \times 2 + 6,5 \times 2 + 7 \times 3) / 8 = 51/8$$

$$\xi(7) = (6 \times 3 + 6,5 \times 2 + 7 \times 3) / 8 = 52/8$$

$$\xi(8) = (8 \times 8) / 8 = 64/8,$$

где $\xi(k)$ – средневзвешенное значение k-го критерия.

Тогда усреднённая последовательность критериев по возрастанию выглядит следующим образом:

Таблица 6

Средневзвешенные значения факторов по возрастанию

1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi(4)$	$\xi(5)$	$\xi(6)$	$\xi(2)$	$\xi(3)$	$\xi(1)$	$\xi(7)$	$\xi(8)$
1	43/16	22/8	29/8	81/16	51/8	52/8	64/8

Теперь по формуле 1 рассчитаем значения всех критериев относительно первой строки таблицы 3.

Эксперт в соответствии с ШОВ оценивает все критерии, в ней не предусмотрены значения больше 9 и меньше $1/9$, но на практике он слабо понимает разницу между $1/7$ и $1/9$. Так, в матрице 3 относительный вес критерия 2 (общественный транспорт) к критерию 8 (финансы) равно $1/7$, а расчётное $1/20$, а все, что выше 9, это только 7 или 9, то есть значения критериев относительной важности просто обрезаются: им присваивается значение 7 или 9, или $1/7 - 1/9$.

Таблица 7

Расчётные значения критериев относительно данных первой строки

Фактор	Размеры дома	Общ. транспорт	Окрестности	Возраст дома	Двор	Удобства	Общее состояние	Финансы
	1	2	3	4	5	6	7	8
Размеры дома	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Общ. транспорт	1/5	1	3/5	7/5	6/5	6/5	1/15	1/20
Окрестности	1/3	5/3	1	7/3	2	2	1/9	1/12
Возраст дома	1/7	5/7	3/7	1	6/7	6/7	1/21	1/28
Двор	1/6	5/6	1/2	7/6	1	1	1/18	1/24
Удобства	1/6	5/6	1/2	7/6	1	1	1/18	1/24
Общее состояние	3	15	9	21	18	18	1	3/4
Финансы	4	20	12	28	24	24	4/3	1

Кроме этого, если в первую строку матрицы поместить строки с критериями 4, 7 или 8, то получили бы сильно искажённую МПС. Поэтому после предварительного расчёта МПС критериев в первой строке матрицы парных сравнений критериев должен стоять критерий (фактор), занимающий положение близкое к среднему значению $\xi(k)$ матрицы ранжирования.

В данном демонстрационном примере Т. Саати в первую строку поместил критерий 1 ($\xi(1)$), что недалеко от середины значений таблицы ранжирования, но самые лучшие критерии 2 или 3. Поскольку они находятся в центре ранжированных значений критериев, и имея потенциальный размах от 9 до 1/9 потенциально, в ряде, случаев могут «дотянуться», не выходя за границы ШОВ до крайних значений критериев с обеих сторон.

Это улучшит результат, но в целом не решает проблему, что поясню далее на демонстрационном примере.

Распишем последовательно из таблицы 3 МПС парные отношения важности критериев в порядке возрастания. Обозначим сокращения НСО – номера сравниваемых отношений, ЗСО 1 – значения сравниваемых отношений

напрямую из таблицы 3, ЗСО 2 – расчёт через промежуточные парные отношения соседних элементов таблицы 3 и внесём полученные данные в таблицу 8. Для пояснения приведём пример расчёта ЗСО 2 (4→8):

$$\text{ЗСО 2 (4} \rightarrow \text{8)} = \text{ЗСО 1(4} \rightarrow \text{5)} \times \text{ЗСО 1(5} \rightarrow \text{6)} \times \text{ЗСО 1(6} \rightarrow \text{2)} \times \text{ЗСО 1(2} \rightarrow \text{3)} \times \text{ЗСО 1(3} \rightarrow \text{1)} \times \text{ЗСО 1(1} \rightarrow \text{7)} \times \text{ЗСО 1(7} \rightarrow \text{8)} = 1/3 \times 1/2 \times 1/3 \times 1/3 \times 1/3 \times 1/3 \times 1/2 = 1/972$$

Из таблицы 8 следует:

1. Значения элементов ЗСО 1 и ЗСО 2 в НСО 2 отличаются около 2 раз, а начиная с НСО 3 дополнительно уходят за диапазон допустимых значений по ШОВ;

2. Сравнивая соседние элементы по возрастанию (НСО 1) эксперты различимый порог по ШОВ видят 2,3 или 1/2, 1/3. Сравнивая НСО в порядке возрастания мы видим, что элементы ЗСО 1 все больше отличаются от аналогичных элементов ЗСО 2 в одном комплексе НСО.

3. Начиная с НСО 3 какая-либо цифровая объективность значений элементов, присваиваемых экспертами по ШОВ, полностью теряется, поскольку расчётные значения выходят за диапазон допустимых значений ШОВ.

Мы уже показали, что в учебном демонстрационном примере по выбору дома в МПС критериев была допущена ошибка в значении элемента a_{37} только потому, что не было произведено ранжирование элементов.

Как следует из таблицы 8 эксперты не видят значения 1.25 или 1.5, также по факту не видят разницу между 5-6-7-8-9, что продемонстрировал Т.Саати своим примером по выбору дома. Также, по существу, не видят разницы между 2 и 3.

Эксперт, как и любой человек, понимает простые меры отличия при выполнении парной процедуры сравнения: больше, меньше и равно с учётом погрешности измерений или субъективного индивидуального (коллективного) восприятия и объяснения различия. Также он может учитывать свойство транзитивности парных отношений.

Таблица 8

*Ранжированные факторы (критерии) по возрастанию и
расчёт парных сравнений критериев*

Номер критерия	4	5	6	2	3	1	7	8
НСО 1	4→5	5→6	6→2	2→3	3→1	1→7	7→8	
ЗСО 1	1/3	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	
НСО 2	4→6	5→2	6→3	2→1	3→7	1→8		
ЗСО 1	1/4	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3		
ЗСО 2	1/6	1/6	1/9	1/9	1/9	1/6		
НСО 3	4→2	5→3	6→1	2→7	3→8			
ЗСО 1	1/5	1/3	1/6	1/5	1/5			
ЗСО 2	1/18	1/18	1/27	1/27	1/18			
НСО 4	4→3	5→1	6→7	2→8				
ЗСО 1	1/6	1/6	1/5	1/7				
ЗСО 2	1/54	1/54	1/81	1/54				
НСО 5	4→1	5→7	6→8					
ЗСО 1	1/7	1/5	1/6					
ЗСО 2	1/162	1/162	1/162					
НСО 6	4→7	5→8						
ЗСО 1	1/7	1/6						
ЗСО 2	1/486	1/324						
НСО 7	4→8							
ЗСО 1	1/8							
ЗСО 2	1/972							

На основании этого принципа выполним попарное сравнение элементов (критериев или альтернатив) и произведём ранжирование элементов.

Далее, на основании данных таблицы 6 сортировки и ранжирования

Таблица 9

Матрица парных сравнений критериев (факторов) выбора дома

Фактор	Разме- ры дома	Общ транс- порт	Окрест -ности	Воз- раст дома	Двор	Удоб- ства	Общее состо- яние	Финан- сы	Вектор приор. 1	Вектор приор. 2
Размеры дома	1,000	1,759	1,259	6,375	2,372	2,318	0,981	0,797	0,177	0,175
Общ. Транспорт	0,569	1,000	0,716	3,625	1,349	1,318	0,558	0,453	0,101	0,062
Окрестнос- ти	0,794	1,397	1,000	5,063	1,884	1,841	0,779	0,633	0,141	0,103
Возраст дома	0,157	0,276	0,198	1,000	0,372	0,364	0,154	0,125	0,028	0,019
Двор	0,422	0,741	0,531	2,688	1,000	0,977	0,413	0,336	0,075	0,034
Удобства	0,431	0,759	0,543	2,750	1,023	1,000	0,423	0,344	0,076	0,041
Общее состояние	1,020	1,793	1,284	6,500	2,419	2,364	1,000	0,813	0,181	0,221
Финансы	1,255	2,207	1,580	8,000	2,977	2,909	1,231	1,000	0,222	0,345

элементов произведём расчёт относительной важности критериев по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\xi_i}{\xi_j} \quad (2),$$

и заполним таблицу 9 матрицы парных сравнений факторов. Эта матрица идеально согласована, поскольку мы имеем расчётные значения элементов МПС. Как следует из данных таблицы, они существенно чувствительнее ШОВ.

Далее подсчитаем вектор приоритетов №1 по данным из таблицы (столбец 9), а вектор приоритетов №2 заимствуем из работы [2].

Матрицу парных сравнений альтернатив заимствуем без изменений из работы [2]: они малой размерности 3x3. Рассчитаем глобальные приоритеты и занесём в таблицу 10, при этом вариант 1 - это наши расчётные данные с явным фаворитом в виде дома А. Вариант 2 взят из работы [2], данные проверены также расчётом и отклонения на уровне принятой точности расчётов.

Таблица 10

*Расчёт векторов глобальных приоритетов
по альтернативным вариантам домов*

Вариант дома	векторы глобальных приоритетов вариант 1	векторы глобальных приоритетов вариант 2
А	0,424	0,346
В	0,288	0,369
С	0,288	0,285

В нашем варианте с явным преимуществом победил вариант дома А, как в работе [1] Т.Саати.

В работах [1] и [2] имеются разъяснения по каждому критерию (фактору) и альтернативным вариантам покупки дома, интерпретации результатов, поэтому не стану их повторять, иначе материал существенно увеличится в объёме.

В настоящее время МАИ широко применяется многими исследователями. Понимание недостатков МАИ и путей их преодоления является важным моментом корректного формирования моделей и решения проблем, что и явилось основанием для данной работы.

Небольшое дополнение. В США очень популярны метод анализа иерархий, метод аналитических сетей и различные их модификации. Это, как элемент обязательного стандарта в США. Ими пронизано все стратегическое планирование. Например, от суперсценария с тремя условными приоритетами: борьба за доминирование в мире США, экология планеты, снижение численности населения планеты. Под них выстроены сценарии, приоритеты и решения более низкого уровня и так по сетям вниз со все более подробными сценариями, приоритетами и решениями с обратными связями. Только по России это не один десяток супер подсценариев, с планами и решениями, которые постоянно обновляются и видоизменяются на основе текущей ситуации. Но в основе каждого сценария, как элементарный кирпичик, находится метод парного сравнения приоритетов (критериев) или альтернатив, а в основе метода парного сравнения находится шкала относительной важности с вышеизложенными противоречиями. То есть каждый элементарный кирпичик потенциально «завирусован» и может выдавать неверный результат и предложения по решениям. Это миллиарды долларов потраченных средств, суперкомпьютеры, тысячи специалистов, огромные Data-центры, все это и многое другое только для того, чтобы выдали некую наукоподобную информацию в достоверности которой имеются сомнения.

Список источников информации

1. Т. Саати, К. Кернс. Аналитическое планирование. Организация систем. М., Радио и связь. 1991.
2. Т.Саати. Об измерении неосязаемого. Подход к относительным измерениям на основе главного собственного вектора матрицы парных

сравнений. Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 1 <http://cloudofscience.ru> ISSN 2409-031X

3. Т.Саати. Относительное измерение и его обобщение в принятии решений. Почему парные сравнения являются ключевыми в математике для измерения неосязаемых факторов. Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 2 <http://cloudofscience.ru> ISSN 2409-031X

List of information sources

1. T. Saaty, K. Kearns. Analytical Planning. The Organization of Systems Prigozhin. Pergamon Press. 1985.
2. T. Saaty. About measuring the intangible. An approach to relative measurements based on the principal eigenvector of a pairwise comparison matrix. Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 1 <http://cloudofscience.ru> ISSN 2409-031X
3. T. Saaty. Relative measurement and its generalization in decision making. Why pairwise comparisons are key in mathematics for measuring intangible factors. Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 2 <http://cloudofscience.ru> ISSN 2409-031X